TD_7 – Espaces probabilisés

Exercice 1 ★

Un parlement est constitué de 470 parlementaires. On procède à l'élection d'une commission de 5 membres. Chaque parlementaire vote pour 5 candidats. On suppose qu'il n'y a ni vote nul, ni abstention. On considère les 3 candidats A, B et C. 282 parlementaires ont voté pour A, 117 pour A et B, 105 pour A et C, 79 pour A, B et C, 117 pour B et C mais pas pour A, 27 pour C mais pas pour A ni pour B, 133 pour B mais pas pour A.

1. Combien de parlementaires ont voté pour B ?
2. Combien de parlementaires ont voté pour C ?
3. Combien de parlementaires n'ont voté ni pour A, ni pour B, ni pour C ?

Exercice 2 ★

Dans une classe de 36 élèves, il y a 25 élèves qui mangent à la cantine le midi, 13 élèves qui mangent à la cantine le soir, et 7 élèves qui mangent à la cantine le midi et le soir.

1. Combien y-a-t-il d'élèves qui mangent à la cantine au moins une fois par jour ?
2. Combien y-a-t-il d'élèves qui ne mangent pas à la cantine ?

Exercice 3 ★★

Quel est le nombre de triplets d'entiers naturels $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant « $a + b + c = n$ » où $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 4 ★★

1. Soit A, B et C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations sur les ensembles les événements suivants :
   (i) A seul se produit
   (ii) A et C se produisent, mais non B
   (iii) les trois événements se produisent
   (iv) l'un au moins des événements se produit
   (v) au moins deux événements se produisent
   (vi) un événement au plus se produit
   (vii) aucun des trois événements ne se produit
   (viii) deux événements exactement se produisent
   (ix) deux événements au plus se produisent.
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements. Exprimer en fonction des A_n les événements correspondant à la réalisation de
   (i) tous les A_n,
   (ii) au moins un des A_n,
   (iii) aucun des A_n,
   (iv) au plus un des A_n,
   (v) exactement un des A_n,
   (vi) tous les A_n à partir d'un certain rang.

Exercice 5 ★★

Une maladie M affecte un français sur 1000. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 0.99 lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant on obtient un résultat faussement positif pour 0.2% des personnes saines testées.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant obtenu un résultat positif soit réellement malade ?
2. Que pensez-vous de ce test ?

Exercice 6 ★★

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : quatre vertes et deux jaunes. On tire au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément, les boules n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C, D les événements suivants :

— A : « aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de deux boules. »
— B : « une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de deux boules. »
— C : « deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de deux boules. »
— D : « une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de deux boules. »

1. Calculer $\mathbb{P}_A(D)$, $\mathbb{P}_B(D)$, et $\mathbb{P}_C(D)$.
2. En déduire les probabilités des événements $D \cap A$, $D \cap B$ et $D \cap C$.
3. Calculer la probabilité de l'événement D.

Exercice 7 ★★

On lance un dé à 6 faces non cubique. On suppose que la probabilité d'obtenir un chiffre k est proportionnelle à k.

1. Déterminer la constante de proportionnalité
2. Déterminer la probabilité d'obtenir un chiffre pair
3. Même question avec un dé à $2n$ faces.

Exercice 8 ★★

On suppose que la probabilité qu'un des réacteurs d'un avion (à plusieurs réacteurs) tombe en panne en cours de vol est $1 - p$, indépendamment du comportement des autres moteurs de l'appareil. L'avion peut poursuivre son vol si au moins un réacteur sur deux fonctionne. Pour quelles valeurs de p est-il préférable de voler en avion quadrimoteur plutôt qu'en avion bimoteur ?

Exercice 9 ★★

Dans un étang il y a des gardons et des brochets. Alice pêche à la mouche et prend deux fois plus de gardons que de brochets, alors que Bob, avec sa canne à lancer, attrape autant de gardons que de brochets. Bob est un pêcheur expérimenté : il pêche trois fois plus de poissons que Alice. Les poissons pêchés sont conservés dans le même vivier. On observe au hasard un des poissons pêchés, c'est un brochet. Calculer la probabilité pour que ce soit Bob qui l'ait pêché.

Exercice 10 ★★

On dispose de deux dés A et B.

— le dé A a 4 faces noires et 2 faces blanches,
— le dé B a 2 faces noires et 4 faces blanches.

On lance d'abord une pièce de monnaie truquée : PILE tombe avec une probabilité $p \in]0, 1[$.

Si on obtient PILE on fait des lancers successifs du dé A, et si on obtient FACE on fait des lancers successifs du dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir NOIR au premier lancer de dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir NOIR aux deux premiers lancers.
3. Les évènements « obtenir noir au premier lancer »et « obtenir noir au deuxième lancer »sont-ils indépendants ?
4. On a obtenu NOIR aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer la probabilité d'avoir fait PILE avec la pièce. Déterminer sa limite quand $n \to +\infty$ et interpréter.

Exercice 11 ★★

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate :

— qu'il doit intervenir la première semaine,
— que s'il est intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $\frac{3}{4}$.
— que s'il n'est pas intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $\frac{1}{10}$.

On désigne par E_n l'évènement : « le technicien intervient la n-ieme semaine »et par p_n la probabilité de E_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n)$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|\overline{E_n})$, puis, en fonction de p_n, déterminer $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n)$ et $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $p_{n+1} = \frac{13}{20} p_n + \frac{1}{10}$
3. En déduire une expression de p_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 12 ★★

On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la pièce B donne face avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On choisit une des pièces uniformément au hasard et on la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

1. On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au n-ième lancer. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer.

Exercice 13 ★★★

Au « craps », un joueur lance deux dés de couleurs différentes. Si la somme résultante est $2, 3$ ou 12, le joueur a perdu. Si la somme est 7 ou 11, il gagne. Dans les autres cas, le joueur continue à lancer les dés jusqu'à ce qu'il sorte soit le premier résultat qu'il a tiré, soit 7. Si c'est 7, il perd. Si c'est son résultat initial, il gagne.

On note E_i l'évènement « le résultat initial est i et le joueur finit par gagner »et $E_{i,n}$ l'évènement « la somme initiale est i et le joueur gagne au n^e coup ».

1. Déterminer la probabilité des évènements $E_{i,n}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{i,n})$, calculer alors $\mathbb{P}(E_i)$.
3. Déterminer la probabilité de gagner sur un jeu.

Exercice 14 ★★★

On effectue $n \geqslant 2$ tirages avec remise dans une urne contenant le même nombre de boules blanches que de boules rouges. Soit A l'événement « on tire au moins deux rouges »et B l'événement « on tire des boules des deux couleurs ». Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 15 ★★★

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que la première boule blanche soit obtenue au n-ième tirage.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+kc}$.
   (a) Montrer que l'on a $p_n = a_{n-1} - a_n$, pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$ et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interpréter.

Exercice 16 ★★

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène Face avec la probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne à son n-ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?
3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

Exercices issus d'oraux

Exercice 17 ★★

(*Oral 2015*)

Une usine fabrique des pièces. 10% des pièces produites sont mauvaises, on leur fait passer un test qui permet d'accepter 91% des bonnes pièces et de retirer 90% des mauvaises.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée ?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit bonne bien qu'elle ne soit pas acceptée ?
3. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit mauvaise bien qu'elle soit acceptée ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur ?

Exercice 18 ★★★

(*Oral 2015*)

Une puce se déplace sur une droite ; au départ elle est à la position $n \in [\![0, N]\!]$. À chaque saut son abscisse augmente de 1 avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou diminue de 1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Elle s'arrête une fois arrivée en 0 ou en N.

On considère les événements A_n : « la puce s'arrête en 0 », B_n : « la puce s'arrête en N »et C_n : « la puce ne s'arrête jamais ». On note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. Donner une relation entre a_n, b_n et c_n. Calculer a_0, a_N, b_0 et b_N.
2. On considère l'événement D : « le premier saut est vers la droite »et $G = \overline{D}$. Montrer que, pour $n \in [\![1, N-1]\!]$, $a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$
3. En déduire a_n en fonction de n, p, q et N (*on traitera séparément le cas* $p = \dfrac{1}{2}$). Faire de même pour b_n.
4. Calculer $a_n + b_n$, conclure.

Exercice 19 ★★★

(*Oral 2017*)

On tire avec remise une boule parmi n boules numérotées de 1 à n.

1. Quelle est la probabilité que la k-ième boule tirée ait le numéro j et que toutes les précédentes aient des numéro strictement inférieurs à j ?
2. En déduire la probabilité que la k-ième soit strictement supérieure à toutes les précédentes.
3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 20 ★★★

(*Oral 2018*)

On considère un dé équilibré à 6 faces, 2 faces portent le numéro 0, 2 faces le numéro 1 et 2 le numéro 2. On réalise trois lancers successifs indépendants et on note A, B et C les résultats.

1. Calculer la probabilité que $G : Ax + By + C = 0$ soit une droite

   On réalise une seconde de manière indépendante les trois lancers, on note A', B' et C' les nouveaux résultats
2. Calculer la probabilité que $H : A'x + B'y + C' = 0$ soit une droite et la probabilité que G et H soit des droites
3. Sachant que G et H sont des droites, quelle est la probabilité qu'elles soient parallèles ?
4. Sachant que G et H sont des droites, quelle est la probabilité qu'elles soient perpendiculaires ?

Exercice 21 ★★★★

(*Oral 2019, 2021*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$
2. Deux urnes A et B contiennent n boules numérotées de 1 jusqu'à n. On tire une boule dans A et une boule dans B et on note a et b leurs numéros respectifs. Soit E_n l'événement « a divise b »
   (a) Calculer $\mathbb{P}(E_3)$ et $\mathbb{P}(E_4)$
   (b) Exprimer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'une somme
   (c) Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}(E_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.